

Banen berekenen met Newton en Kepler

Mechanica (fysica) en astronomie
Lerarengids



**Bereken zelf de baan
van een planeet, een
komeet, een asteroïde,
of een satelliet.**

- Toepassen van de basiswetten van Newton en Kepler ●●●●●
- Numerieke berekening van banen in een Excel rekenblad ●●●●●
- Opdrachten en uitbreidingvragen voor leerlingen ●●●●●●●

OVER ESERO BELGIUM

ESERO is een scholenprogramma van de Europese Ruimtevaartorganisatie ESA. Het doel van dit programma is leraren van basisonderwijs en middelbaar onderwijs helpen om het populaire thema ruimtevaart in de klas te brengen, binnen hun lesopdracht. Dit doen we op drie manieren: **lesmateriaal** (online), **lerarenvormingen**, en **STEM projecten voor scholen**. Het aanbod is volledig gratis voor leraren in beroep en leraren in opleiding, en is afgestemd op de eindtermen in het onderwijs. Hedendaagse en inspirerende ruimtevaartmissies vormen de context diverse schoolvakken.

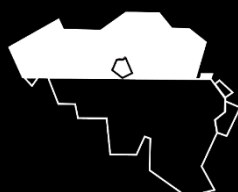
WWW.ESERO.BE

Nationale coördinator



KU LEUVEN

Vlaamse coördinator



UGENT
VOLKSSTERRENWACHT
ARMAND PIEN

Frans- en Duitstalige
coördinator



ULB

La Scientothèque

ESA Education beheert en coördineert alle ESERO's in Europa. Elke ESERO bestaat dankzij een cofinanciering van ESA en nationale partners. Het federaal wetenschapsbeleid (BELSPO) is de cofinancierende partner voor ESERO Belgium.



Bereken zelf de baan van een planeet, een komeet, een asteroïde, of een satelliet.

Cursus kenmerken

Leeftijd doelgroep	15-18 jaar
Type	Oefeningen voor leerlingen
Vereiste lestijd	2 uren
Kostprijs per activiteit	Niets
Locatie	Gewoon klaslokaal met computers
Vereist gebruik van	MS Excel rekenblad
Wat de leerlingen gaan leren	• Basiswetten van Newton en Kepler en toepassing ervan op banen van hemellichamen. • Kenmerken van planeetbanen en komeetbanen. • Kennismaking met de wetenschappelijke methode om kennis te verwerven over objecten in het Zonnestelsel.
Vaardigheden die de leerlingen aanleren	• Toepassen van wiskundige formules. • Werken met een Excel rekenblad en invoegen van een grafiek. • Interpretatie van fysische grootheden en formules en verslaggeving ervan.

Colofon

Uitgave November 2014

Laatste update 14 december 2017

Gebruik en beschikbaarheid

- Dit cursusmateriaal mag gratis gebruikt worden voor educatieve doeleinden. Wie fragmenten eruit overneemt, dient de bron te vermelden.
- Lesmateriaal downloads op www.esero.be > Nederlands > Lesmateriaal.
- De Materialen Kit wordt gratis uitgeleend aan scholen die deel uitmaken van bepaalde scholengroepen. De lijst van scholengroepen en de respectievelijke verantwoordelijken staat op www.esero.be > Nederlandstalig > Lesmateriaal.

AUTEURS

Werner Poets

- Concept en cursusinhoud
- Werner Poets is leraar fysica in hoger secundair onderwijs

ESERO Belgium

- Cursus afwerking en distributie
- Organisatie van het Rosetta project voor scholen
- Medewerker: Pieter Mestdagh

Koninklijke Sterrenwacht van België

- Observatiedata van kometen
- Medewerkers: Thierry Pauwels en Jan Cuypers

Uw mening is belangrijk

Cursussen van ESERO Belgium worden online aangeboden in dynamische versie. Dat betekent dat elke bruikbare feedback van gebruikers onmiddellijk leidt tot de publicatie van een aangepaste uitgave op www.esero.be (Nederlandstalig). Help toekomstige gebruikers door uw opmerkingen of aanvullingen per email op te sturen (www.esero.be > NL > contact)

Gebruikers die nieuwe onderdelen toevoegen aan de cursus worden onder 'colofon' in de auteurslijst vermeld.

Inhoud

Cursus kenmerken	3
Colofon	4
Inhoud	5
INLEIDING	6
De achtergrond van deze cursus: Rosetta	Fout! Bladwijzer niet gedefinieerd.
De Rosetta missie van ESA	Fout! Bladwijzer niet gedefinieerd.
Het ESERO Rosetta project in Vlaams onderwijs	Fout! Bladwijzer niet gedefinieerd.
Het doel van deze cursus	6
Inleiding.....	6
Numerieke verificatie van de wetten van Kepler m.b.v. de 2de wet van Newton en de gravitatiewet	7
BEREKENINGSMETHODE	8
Hoe deze cursus gebruiken?	8
Opbouw van de berekeningsmethode	8
① Bepalen van de positie op moment T_1	12
② Bepalen van de versnelling op moment T_1	12
③ Bepalen van de snelheid op moment T_1	16
④ Bepalen van de positie op moment T_2	16
⑤ Bepalen van de versnelling op moment T_1	17
OPDRACHTEN	18
① Bepalen van een baan van een komeet	18
② Bepalen van de afstand van het aphelium van de komeet tot de zon	19
③ Bepalen van de periode van de komeet	19
④ Verifiëren van de eerste wet van Kepler	19
⑤ Verifiëren van de tweede wet van Kepler	21
⑥ Verifiëren van de derde wet van Kepler	24
UITBREIDINGVRAGEN: de antwoorden	25

INLEIDING

Het doel van deze cursus

Inleiding

In de fysica zijn er verschijnselen die men kan beschrijven m.b.v. een vergelijking waarvan men de oplossing niet kent. Een voorbeeld zijn differentiaal vergelijkingen. Men kan met een algoritme altijd de afgeleide van een willekeurige functie vinden maar er is geen algoritme dat van elke functie de primitieve functie kan bepalen. Sommige integralen kan men niet exact oplossen.

In zulke situatie blijft men niet bij de pakken zitten en zal men het verschijnsel **numeriek analyseren**. Sommige integralen kan men niet exact oplossen, maar men kan wel de numerieke waarde binnen bepaalde integratiegrenzen berekenen.

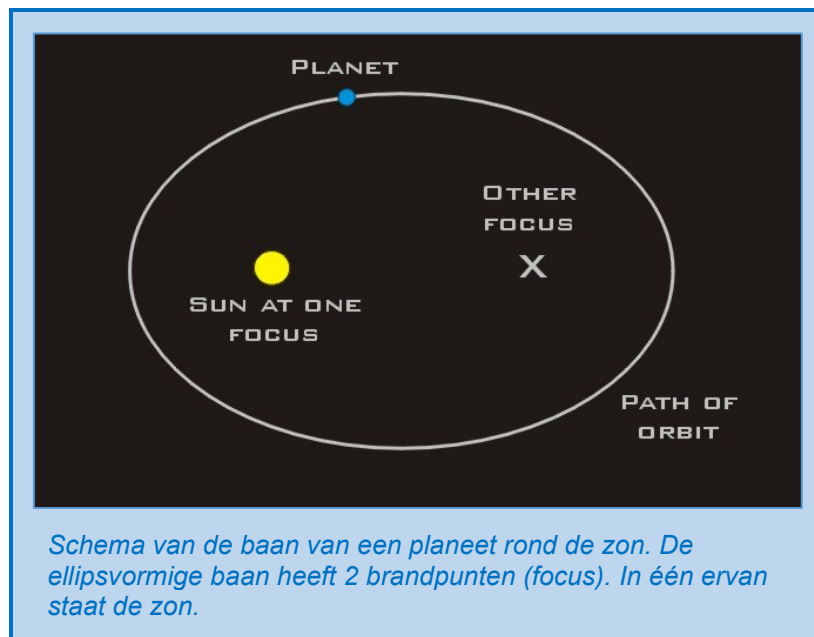
Uitbreiding 1

Als de realiteit volledig wordt beschreven door deterministische beschrijving van de klassieke mechanica, wat betekent dit dan voor het concept van de vrije wil van een persoon?

Numerieke verificatie van de wetten van Kepler m.b.v. de 2de wet van Newton en de gravitatiewet

De drie wetten van Kepler zijn empirisch bepaalde wetten.

De **eerste wet van Kepler** stelt dat hemellichamen (planeten, kometen, ...) bewegen om de zon langs ellipsvormige banen. Hierbij bevindt de zon zich in één van de brandpunten van de ellips.



Newton heeft de wetten van Kepler en vele andere verschijnselen verklaard aan de hand van zijn 2de wet en de gravitatiewet. Zo kan je exact aantonen dat als er één object rond de zon beweegt, de baan van dit object een ellips is. De afleiding kan analytisch gebeuren maar is niet eenvoudig. Hier zullen we de baan van een komeet op numerieke wijze bepalen.

BEREKENINGSMETHODE

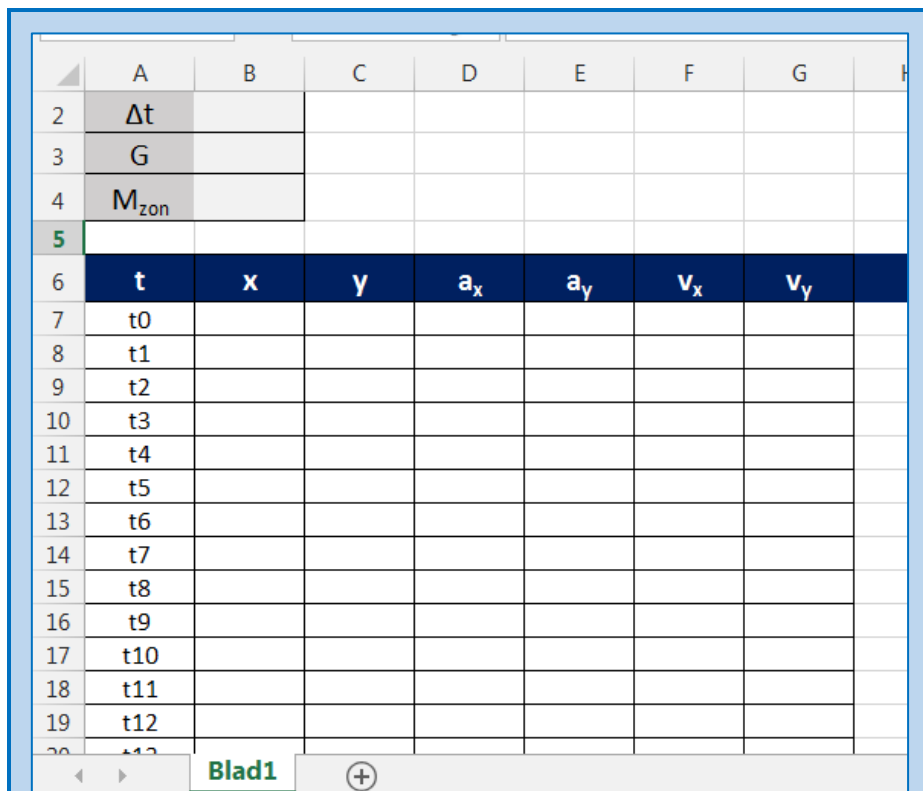
Hoe deze cursus gebruiken?

We zullen deze berekeningen maken in een **Excel-werkblad**.

Je start de cursus met een leeg Excel rekenblad. Dan doorloop je de volledige cursus, waarin telkens wordt uitgelegd welke **waarden en formules** in de verschillende cellen thuishoren, en waarom. Vul de vereiste waarden en formules in op de juiste plaats.

Uiteindelijk eindig je met een volledige rekenblad waarin je om het even welk hemellichaam kan invullen, zodat het programma de **ellipsvormige baan** van dat hemellichaam kan berekenen.

De structuur van ons rekenblad ziet er als volgt uit:



	A	B	C	D	E	F	G	H
2	Δt							
3	G							
4	M_{zon}							
5								
6	t	x	y	a_x	a_y	v_x	v_y	
7	t0							
8	t1							
9	t2							
10	t3							
11	t4							
12	t5							
13	t6							
14	t7							
15	t8							
16	t9							
17	t10							
18	t11							
19	t12							
20	t13							

Excel rekenblad om de baan van een hemellichaam rond een ster of een planeet te berekenen. De begin-gegevens en de formules zijn nog niet ingevuld. Bron: ESERO BE.

Opbouw van de berekeningsmethode

In de klassieke mechanica wordt de baan van een voorwerp volledig bepaald (zowel in de toekomst als het verleden) als we volgende gegevens kennen:

- De massa van het voorwerp
- De krachten die op het voorwerp worden uitgeoefend op elk tijdstip
- De positie en de snelheid op één moment.

Men duidt dit aan met het begrip **determinisme**. De positie en de snelheid op één moment noemt men de **beginvoorwaarden**.

Om over na te denken ...

Als de realiteit volledig wordt beschreven door deterministische beschrijving van de klassieke mechanica, wat betekent dit dan voor het concept van de vrije wil van een persoon?

Observatiegegevens als uitgangssituatie

Om de baan van een komeet te bepalen zullen we moeten beschikken over **beginvoorwaarden**. Dit zijn van de **positie** en de **snelheid** van een komeet t.o.v. de Zon op een tijdstip. Elke leerling krijgt deze gegevens van een komeet. Hieronder zie je een voorbeeld. Dit zijn gegevens die ons ter beschikking zijn gesteld door de Koninklijke Sterrenwacht van België. Aangezien we met deze gegevens de snelheid en de positie kennen op het tijdstip dat de komeet zich in het perihelium bevinden zullen we als beginvoorwaarden deze gegevens gebruiken.

Het **perihelium** is het punt op een elliptische planeetbaan die het dichtst bij de zon ligt.

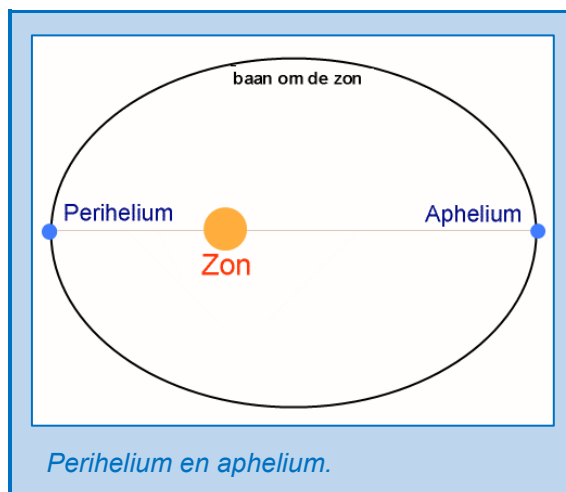
Naam	referentie	excentriciteit	baanhelling (graden)	perihelium afstand (AE)	snelheid in perihelium (AE per dag)
Comet 1992y Shoemaker	MPC 22029	0,999402300	65,98594	2,3136667	0,01599120303
Comet 1993a Mueller	MPC 23649	1,001778500	124,87784	1,9375309	0,01748497972
Comet 1993e P-Shoemaker- Levy 9	IAUC 5906	0,207491000	5,8254	5,379569	0,00814985068

Eenheden

Merk op dat niet alle gegevens in SI-eenheden zijn weergegeven. We zullen steeds berekeningen maken met SI-eenheden. Zet dus deze gegeven eerst om naar SI-eenheden. De astronomische eenheid (AE, Engels: AU) is een afstandsmaat die vrijwel gelijk is aan de gemiddelde afstand tussen de Aarde en de Zon, ongeveer 149,6 miljoen kilometer.

Perihelium / Aphelium

Het perihelium is het punt in de baan van een planeet of ander object dat in een baan om de zon draait, dat het dichtst bij de zon gelegen is. Objecten met een elliptische baan hebben ook nog een aphelium, dit is het punt op de baan waar het object de grootste afstand tot de zon bereikt.

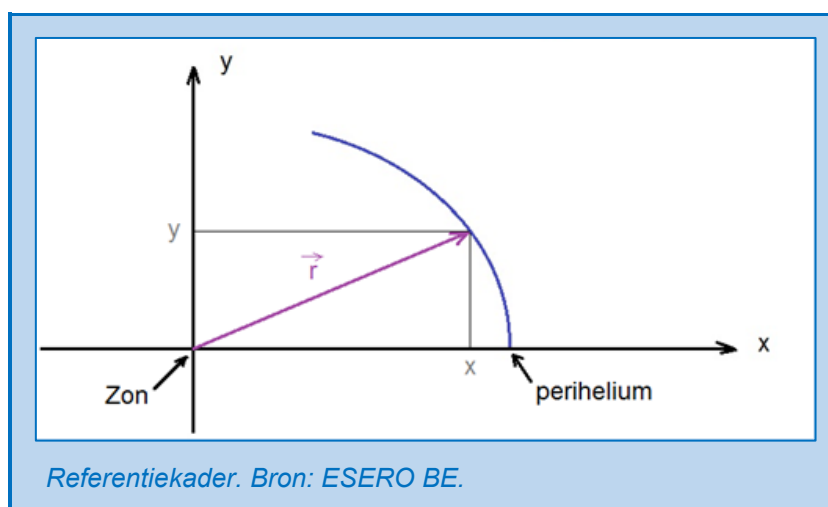


Uitbreiding 2

Wat is de oriëntatie van de snelheidsvector in het perihelium ten opzichte van de verbindingslijn tussen het perihelium en de Zon?

Referentiekader

We zullen gebruikmaken van een assenstelsel waar de Zon zich in de oorsprong bevindt en waarbij de x-as door het perihelium gaat. De x-as is georiënteerd van de Zon naar het perihelium.



Uitbreiding 3

Wat is het verband tussen de grootte van de snelheid van de komeet en de grootte van de x-component van de snelheid en de grootte van de y-component van de snelheid?

Berekeningen

We gebruiken de observatiegegevens van de komeet 1993e P-Shoemaker-Levy 9 om de berekeningsmethode uit te leggen.

Noteer in de tabel voor de positie en de snelheid de x- en de y-component op het begintijdstip t_0 :

- $x(t_0) = 8,048 \cdot 10^{11} \text{ m}$
- $v_x(t_0) = 0 \text{ m/s}$
- $y(t_0) = 0 \text{ m}$
- $v_y(t_0) = 1,411 \cdot 10^4 \text{ m/s}$

Nu volgen we deze redenering:

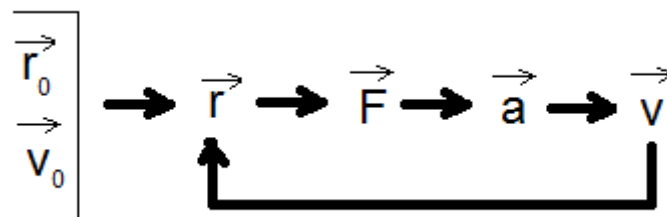
- Als de positievector $\vec{r}$ gekend is op het moment t_0 en we de snelheid kennen op het moment t_0 dan kunnen we de positievector $\vec{r}$ bepalen op het moment t_1 .
- Als we de positievector $\vec{r}$ op het moment t_1 kennen dan kunnen we de gravitatiekracht bepalen op het moment t_1 .
- Als we de gravitatiekracht op het moment t_1 kennen dan kunnen we de versnelling $\vec{a}$ bepalen op het moment t_1 .
- Als we de versnelling op het moment t_1 kennen en de snelheid $\vec{v}$ op het moment t_0 dan kunnen we de snelheid bepalen op het moment t_1 .
- Als de positievector gekend is op het moment t_1 en we de snelheid $\vec{v}$ kennen op het moment t_1 dan kunnen we de positievector bepalen op het moment t_2 .

Dezelfde redenering kunnen we toepassen op elk volgend tijdsinterval:

- Als de positievector $\vec{r}$ gekend is op het moment t_{n-1} en we de snelheid kennen op het moment t_{n-1} dan kunnen we de positievector $\vec{r}$ bepalen op het moment t_n .
- Als we de positievector $\vec{r}$ op het moment t_n kennen dan kunnen we de gravitatiekracht bepalen op het moment t_n .
- Als we de gravitatiekracht op het moment t_n kennen dan kunnen we de versnelling $\vec{a}$ bepalen op het moment t_n .
- Als we de versnelling op het moment t_n kennen en de snelheid $\vec{v}$ op het moment t_{n-1} dan kunnen we de snelheid bepalen op het moment t_n .
- Als de positievector $\vec{r}$ gekend is op het moment t_n en we de snelheid $\vec{v}$ kennen op het moment t_n dan kunnen we de positievector bepalen op het moment t_{n+1} .

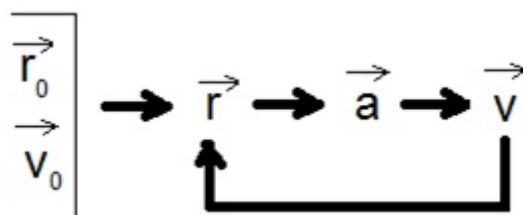
Op deze wijze kan men voor elk moment de positie bepalen en dus de baan.

Dit wordt schematisch hieronder weergegeven:

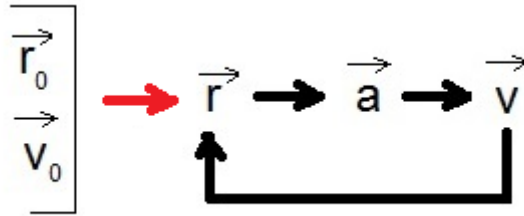


Zodra we de beginpositie en de beginsnelheid van een komeet kennen, kunnen we dit systeem in gang zetten en voert de lus zich zelf. Zo een lusvormige bewerking noemt men een iteratie.

Verderop zal duidelijk worden gemaakt dat dit schema vereenvoudigd kan worden tot:



1 Bepalen van de positie op moment T_1



De positie $\vec{r}$ wordt bepaald door de x- en y-coördinaat van de komeet. Als we de x- en y-coördinaat en de grootte van de x- en de y-component van de snelheid kennen op het moment t_0 , dan kunnen we de x- en y-coördinaat op het moment t_1 bepalen:

$$x(t_1) = x(t_0) + \Delta x(t_1) = x(t_0) + v_x(t_0) \cdot \Delta t$$

en

$$y(t_1) = y(t_0) + \Delta y(t_1) = y(t_0) + v_y(t_0) \cdot \Delta t$$

Dit komt neer op de aanname dat de komeet een ERB uitvoert gedurende het interval Δt . Dit is niet correct maar de afwijking met de reële beweging is klein als we Δt klein kiezen.

Het verband tussen t_0 en t_1 is:

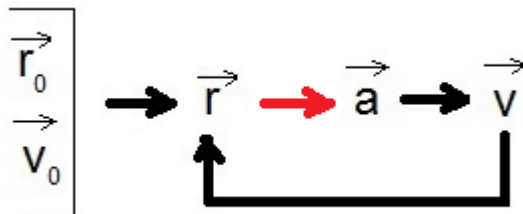
$$t_1 = t_0 + \Delta t$$

Met Δt een constant getal. We zullen in formules nooit getallen opnemen. Als in een formule gebruik wordt gemaakt van een getal, zoals Δt , zullen we verwijzen met een cel-adres naar waar de waarde van dit getal te vinden is.

Uitbreiding 4

Waarom is het geen goede werkwijze om getallen op te nemen in een formule?

2 Bepalen van de versnelling op moment T_1



De versnelling van een object kan bepaald worden met het tweede beginsel van Newton. De grootte van de versnelling in de x-richting is gelijk aan de grootte van de x-component van de resulterende kracht gedeeld door de massa van het object:

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

Analoog geldt voor de grootte van de versnelling in de y-richting:

$$a_y = \frac{F_y}{m}$$

Hier houden we enkel rekening met de grootte van de gravitatiekracht die de Zon uitoefent op de komeet. De grootte van de x-component van de resulterende kracht is in dit geval de grootte van de x-component van de gravitatiekracht uitgeoefend door de Zon.

Voor de gravitatiekracht geldt:

$$F = G \cdot \frac{m_{Zon} \cdot m_{komeet}}{r^2}$$

Met G de universele gravitatieconstante:

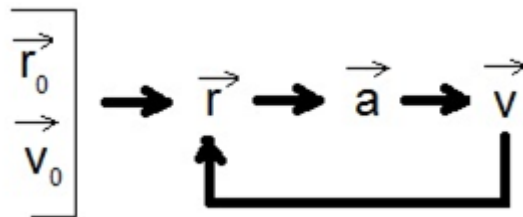
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

Volgens de 2de wet van Newton is de grootte van de versnelling van de komeet:

$$a = \frac{F}{m_{komeet}} = \frac{G \cdot \frac{m_{Zon} \cdot m_{komeet}}{r^2}}{m_{komeet}} = G \cdot \frac{m_{Zon}}{r^2}$$

We stellen dus vast dat we de massa van de komeet niet moeten kennen om de grootte van de versnelling van de komeet te bepalen.

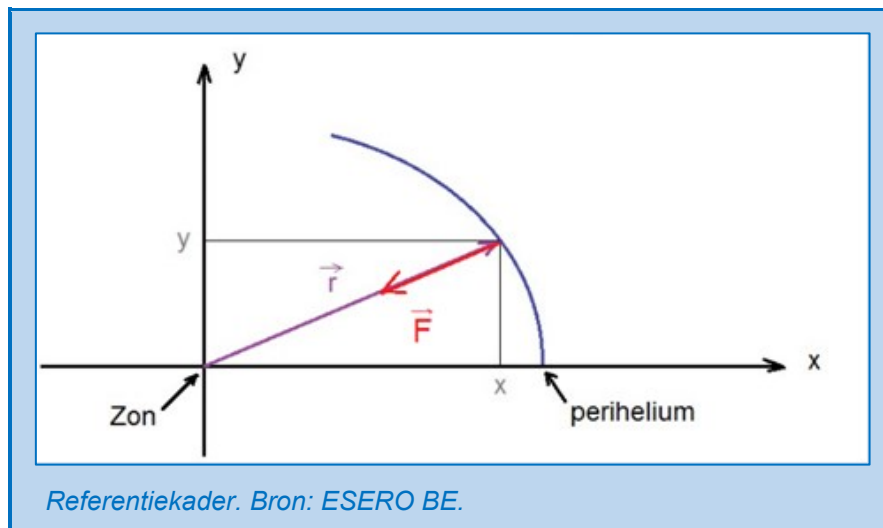
We kunnen dus hier de stap om de kracht te bepalen achterwege laten:



De massa van de Zon bedraagt $1,98 \cdot 10^{30}$ kg.

De versnelling in de x-zin is de projectie van de versnelling op een lijn parallel met de x-as door het punt waar zich de komeet bevindt.

De richting van de versnelling is gelijk aan de positievector omdat de gravitatiekracht steeds naar de Zon gericht is.

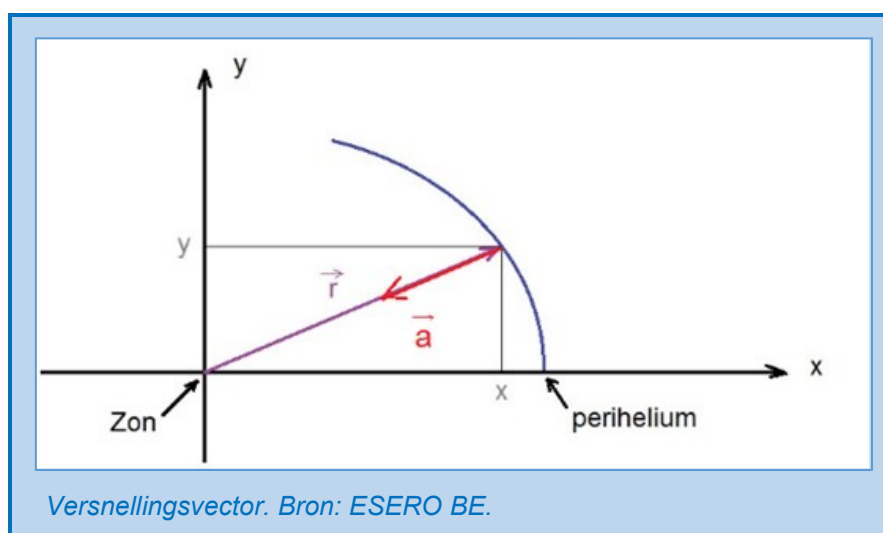


In het algemeen is een centrale kracht een kracht, waarvan de grootte alleen afhankelijk is van de afstand r van het object ten opzichte van de oorsprong en die is gericht langs de lijn, die deze twee punten verbindt. De gravitatiekracht uitgeoefend door de Zon op de komeet is dus een centrale kracht.

Uitbreiding 5

Geef een voorbeeld van een andere centrale kracht die je kent.

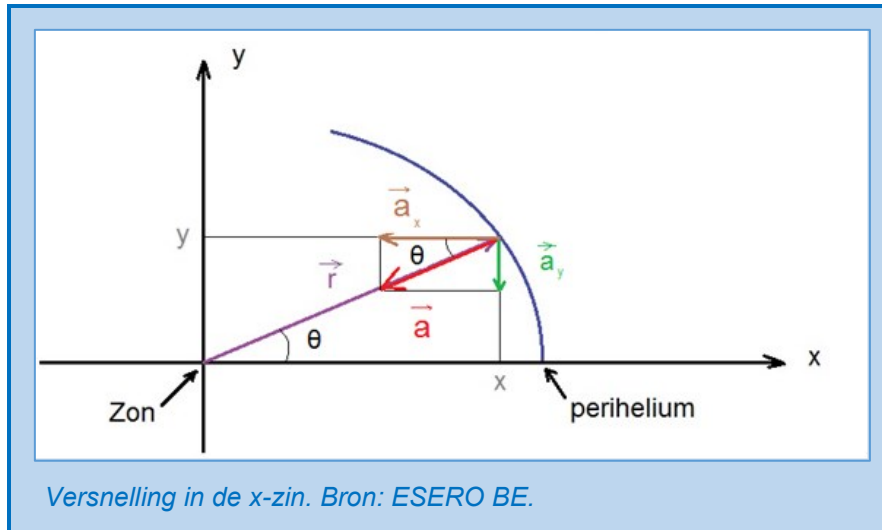
De richting van de versnelling heeft dezelfde richting als de resulterende kracht. De versnelling van de komeet zal dus dezelfde richting hebben als de gravitatiekracht uitgeoefend door de Zon op de komeet.



Door de stelling van Pythagoras toe te passen is de afstand r te schrijven in functie van x - en y -componenten van de positievector:

$$a = G \cdot \frac{m_{\text{Zon}}}{r^2} = G \cdot \frac{m_{\text{Zon}}}{x^2 + y^2}$$

De versnelling in de x -zin is de projectie van de versnelling $\vec{a}$ op een lijn parallel met de x -as door het punt waar zich de komeet bevindt.



De cosinus van de hoek θ tussen de positievector en de x-as kan bepaald worden met de x- en y-componenten van de positievector:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Dus geldt er:

$$a_x = -a \cdot \cos(\theta) = -a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Het min-teken in de formule drukt uit dat de grootte van de x-component van versnelling een tegengestelde zin heeft als de oriëntatie van de x-as.

Uitbreiding 6

Geldt de formule voor a_x ook in het tweede, derde en vierde kwadrant?

Vullen we de grootte voor de versnelling in, dan verkrijgen we:

$$a_x = -G \cdot \frac{m_{\text{Zon}}}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = -G \cdot \frac{m_{\text{Zon}} \cdot x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Analoog geldt er:

$$a_y = -a \cdot \sin(\theta) = a \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Vullen we de grootte voor de versnelling in, dan verkrijgen we:

$$a_y = -G \cdot \frac{m_{\text{Zon}}}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = -G \cdot \frac{m_{\text{Zon}} \cdot y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

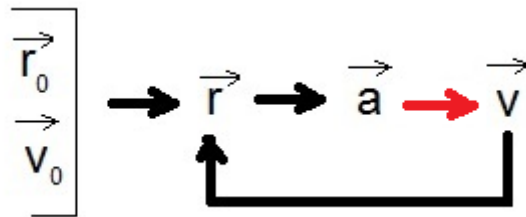
De versnelling in de x-zin op tijdstip t_1 is:

$$a_x(t_1) = -G \cdot \frac{m_{\text{Zon}} \cdot x(t_1)}{(x(t_1)^2 + y(t_1)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

De versnelling in de y-zin op tijdstip t_1 is:

$$a_y(t_1) = -G \cdot \frac{m_{Zon} \cdot y(t_1)}{(x(t_1)^2 + y(t_1)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3 Bepalen van de snelheid op moment T_1



De snelheid in x-zin $v_x(t_1)$ op tijdstip t_1 wordt gegeven door:

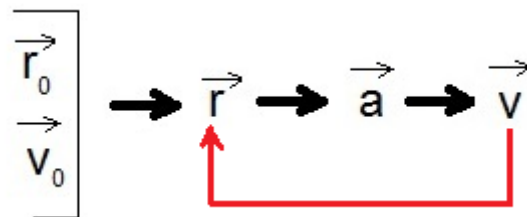
$$v_x(t_1) = v_x(t_0) + \Delta v_x(t_1) = v_x(t_0) + a_x(t_1) \cdot \Delta t$$

De snelheid in y-zin $v_y(t_1)$ op tijdstip t_1 wordt gegeven door:

$$v_y(t_1) = v_y(t_0) + \Delta v_y(t_1) = v_y(t_0) + a_y(t_1) \cdot \Delta t$$

De formules die we gebruiken om de grootte van v_x en van v_y te actualiseren tussen het begintijdstip van het interval Δt en het eindtijdstip van het interval Δt , drukken uit dat versnelling constante is in het interval Δt . Dit is niet correct maar de afwijking met de reële snelheidsverandering is klein als we Δt klein kiezen.

4 Bepalen van de positie op moment T_2



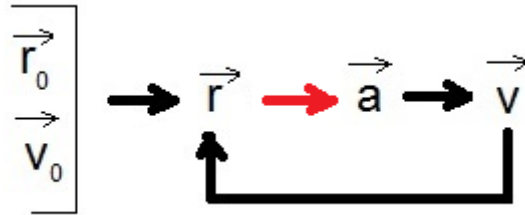
Als we de x- en y-coördinaat en de grootte van de x- en de y-component van de snelheid kennen op het moment t_1 , dan kunnen we de x- en y-coördinaat op het moment t_2 bepalen:

$$x(t_2) = x(t_1) + \Delta x(t_2) = x(t_1) + v_x(t_1) \cdot \Delta t$$

en

$$y(t_2) = y(t_1) + \Delta y(t_2) = y(t_1) + v_y(t_1) \cdot \Delta t$$

5 Bepalen van de versnelling op moment T_1



Met de x- en y-componenten van de positievector $\vec{r}$ op tijdstip t_2 kan men de x- en y-componenten van de versnelling op tijdstip t_2 bepalen op dezelfde wijze zoals beschreven onder punt 2 hierboven. Nadien kan de snelheid op tijdstip t_2 worden bepaald, waarmee de x- en y-coördinaat kan worden bepaald op tijdstip t_3 . Dit doorlopen van de cyclus kan steeds worden herhaald zodat de baan van de komeet kan worden bepaald. Deze baan kan worden weergegeven door met Excel een grafiek te maken van de y-coördinaat in functie van de x-coördinaat.

OPDRACHTEN

1 Bepalen van een baan van een komeet

Pas de berekeningsmethode toe die beschreven is hierboven op de gegevens van drie kometen. De baan van deze komeet kan worden weergegeven door met Excel een grafiek te maken van de y-coördinaat in functie van de x-coördinaat.

Doe dit eerst voor een komeet met een excentriciteit kleiner dan 0,8. Kies aanvankelijk een grote Δt (bijvoorbeeld $\Delta t = 1.000.000$ s).

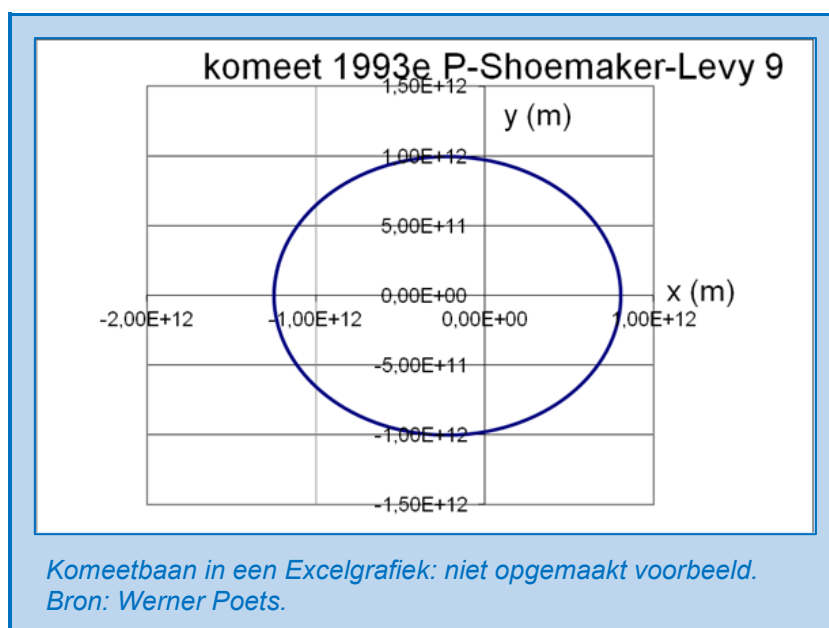
Ga na of je min of meer een gesloten baan verkrijgt.

Maak vervolgens Δt zo klein mogelijk waarbij nog steeds de volledige baan wordt getoond.

Uitbreiding 7

Door wat wordt de kleinste waarde van Δt bepaald?

Standaard zal Excel niet eenzelfde schaal gebruiken voor de x- en de y-as. Dit geeft een vertekend beeld. Rek de kader van de grafiek zo uit dat de schaal voor de x- en de y-as ongeveer dezelfde is. Hieronder wordt een voorbeeld getoond.



Opdracht

Toon de onvervormde grafische voorstelling van de baan van de drie kometen. Benoem de assen en vermeld telkens de gebruikte SI-eenheid.

2 Bepalen van de afstand van het aphelium van de komeet tot de zon

Het aphelium is de grootste afstand die de komeet tot de zon bereikt. Bepaal de afstand van dit aphelium van de komeet tot de zon.

Opdracht

Duid op de x-as van de $y(x)$ -grafiek het aphelium van Jupiter aan en het aphelium van Neptunus van elke komeet en vermeld er bij de grootte van het aphelium van elke komeet.

3 Bepalen van de periode van de komeet

Vraag

Hoe kan je aan de x- en de y-coördinaten zien dat een komeet een omwenteling heeft gemaakt?

Antwoord

Als de x-coördinaat ongeveer terug gelijk is aan de grootte van het perihelium en de y-coördinaat verandert van een negatief getal in een positief getal.

Opdracht

Vermeld de omlooptijd voor elk van de drie kometen en toon in je verslag hoe je deze resultaten bekomen hebt.

4 Verifiëren van de eerste wet van Kepler

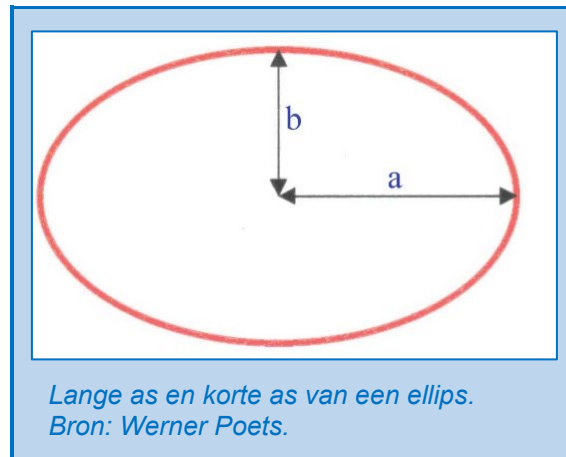
Eerste wet van Kepler: ellipsvormige banen

De eerste wet van Kepler stelt dat alle hemellichamen die zich rond de zon bewegen in een gesloten baan, deze baan de vorm van een ellips heeft, waarbij de zon zich in een van de twee brandpunten van de ellips bevindt. De vergelijking van een ellips is:

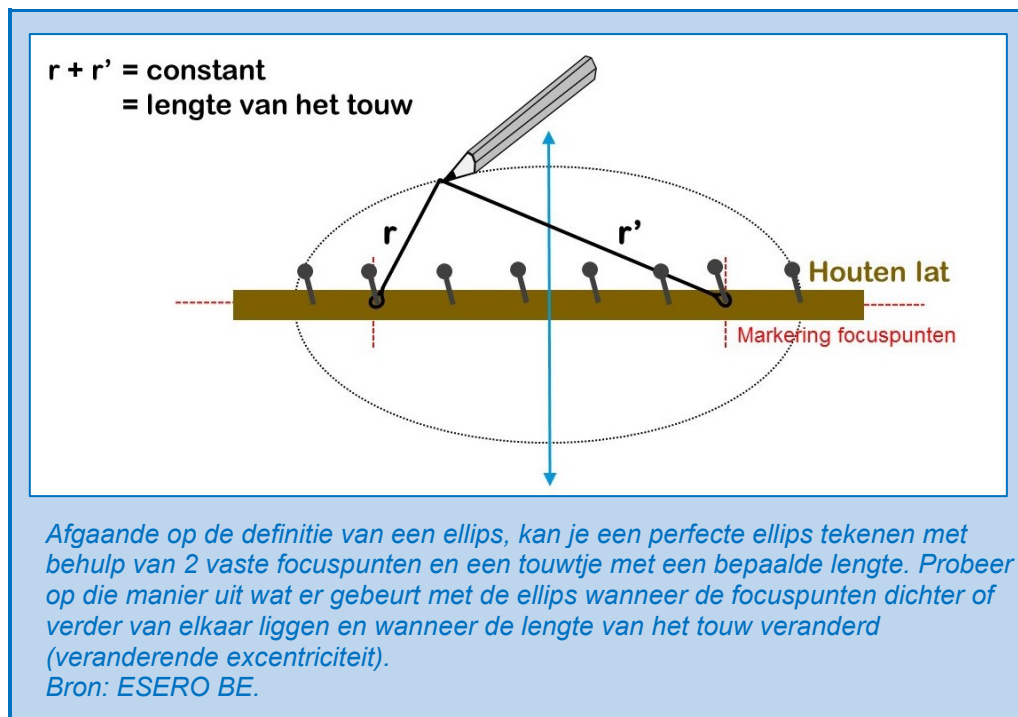
$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

a is de lange as of grote as

b is het lijnstuk loodrecht daarop door het midden van de lange as. **b** is de korte as of kleine as.



De x' - en y' -coördinaat in deze formule zijn coördinaten bepaald in een assenstelsel waarbij de oorsprong in het midden van de ellips ligt.



Vraag

Waar ligt de oorsprong van het assenstelsel waarmee we met behulp van Excel de x - en y -coördinaten van de baan bepaald hebben?

Antwoord

De oorsprong van het assenstelsel waarmee we met behulp van Excel de x - en y -coördinaten van de baan bepaald hebben bepaald valt samen met het middelpunt van de Zon. De Zon bevindt zich in één van de brandpunten van de ellips.

Vraag

Hoe kan je de lange as a bepalen?

Antwoord

Bepaal de grootte van het perihelium en het aphelium. Tel de grootte van het perihelium en het aphelium bij elkaar op en deel deze afstand door twee.

Vraag

Wat moeten we met de coördinaten x en y doen om de coördinaten x' en y' te bepalen?

Antwoord

De y -coördinaten veranderen niet dus er geldt: $y' = y$

Voor de transformatie van de x -coördinaten naar de x' -coördinaten uit te voeren dien je de afstand f van het midden van de ellips te bepalen tot de oorsprong in het x -, y -coördinatenstelsel.

Dan geldt er: $x' = x + f$

Opdracht

Verifieer de eerste wet van Kepler aan door voor één komeet van tien koppels coördinaten (x', y') aan te tonen dan ze voldoen aan:

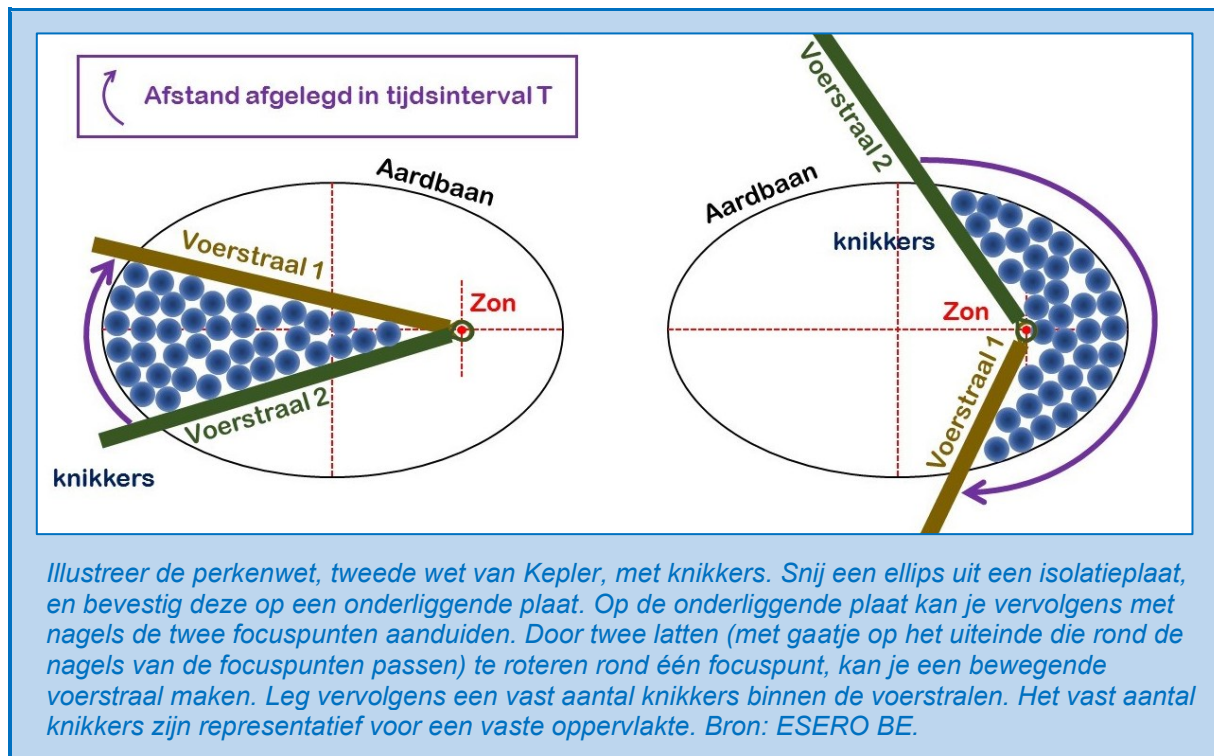
$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

Toon in je verslag ook de methode en de berekeningen i.v.m. de coördinatentransformatie van x en y naar x' en y' .

5 Verifiëren van de tweede wet van Kepler

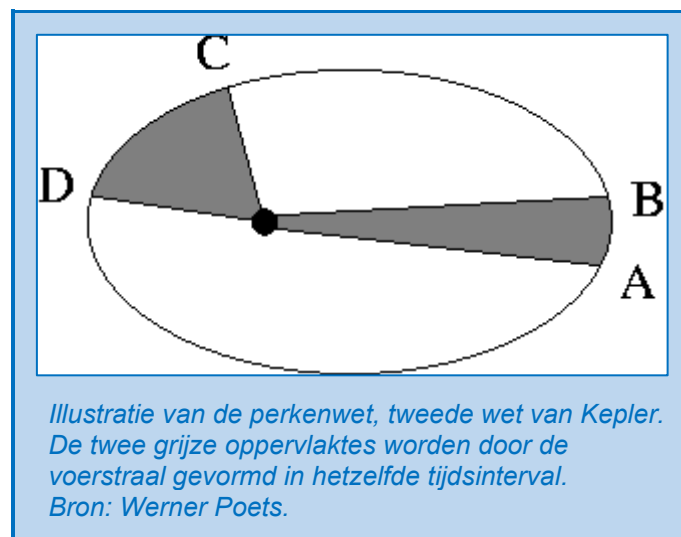
Tweede wet van Kepler: de Perkenwet

De snelheid van een planeet in haar omloopbaan verandert zodanig dat in gelijke tijdsintervallen de oppervlakte, bestreken door de verbindingslijn (voerstraal) tussen de zon en de planeet, gelijk is. De voerstraal beschrijft dus per tijdseenheid een constant oppervlak of een perk, vandaar de tweede wet van Kepler soms de perkenwet wordt genoemd. In de figuur op de volgende pagina is de gemiddelde baansnelheid van de planeet in het interval AB dus kleiner dan in het interval CD.



Vraag

Hoe kan je als je een punt A en een punt C (zoals in de bovenstaande tekening) hebt gekozen, de punten B en D bepalen zodat de tijd die nodig is om van A naar B te bewegen gelijk is aan de tijd die nodig is om van C naar D te bewegen?



Antwoord

Voor een vaste Δt dient dan het aantal rijen in het Excel-werkblad tussen A en B dient gelijk te zijn aan het aantal rijen tussen C en D.

Als je de lengte van de drie zijden (a, b, c) van een driehoek kent dan kan je de oppervlakte O van de driehoek bepalen met behulp van de formule van Heron:

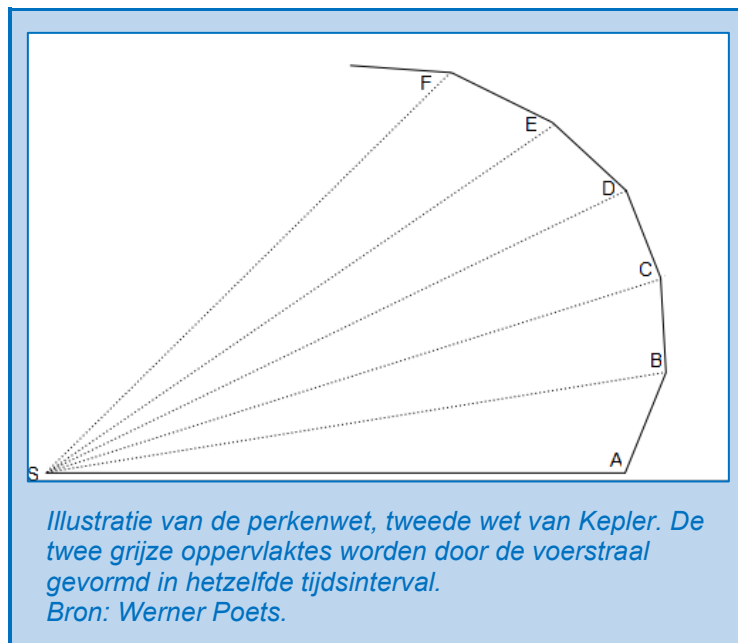
$$O = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (-a+b+c) \cdot (a-b+c)}$$

Vraag

Hoe kan met het oppervlak van een perk bepalen met behulp van de coördinaten x en y van punten van de baan?

Antwoord

De baan van een komeet is een gladde curve. Door de manier waarop we de baan bepalen wordt deze gladde curven benaderd door lijnstukjes.



Stel dat we de oppervlakte van de perk tussen A en F willen bepalen dan kunnen we deze oppervlakte benaderen door de som te nemen van de oppervlakten van de driehoeken SAB, SBC, SCD, SDE, SEF.

Met S de oorsprong en punten A, B, C, D, E, F waarvan we de x- en y-coördinaat berekend hebben.

De coördinaten van de punten A, B, C, D, E, F kennen we. Noemen we a de afstand tussen S en A en de coördinaten van A: x_A en y_A dan is de afstand a gelijk aan:

$$a = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

Noemen we b de afstand tussen S en B en de coördinaten van B: x_B en y_B dan is de afstand a gelijk aan:

$$b = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

Noemen we c de afstand tussen A en B en de coördinaten van A: x_A en y_A en de coördinaten van B: x_B en y_B dan is de afstand c gelijk aan:

$$c = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

We kunnen dus de oppervlakte van de driehoek SAB bepalen met de formule van Heron:

$$O = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (-a + b + c) \cdot (a - b + c)}$$

En we vullen a, b en c in met de formules hierboven.

Op analoge wijze bepalen je de oppervlakten van de driehoeken SAB, SBC, SCD, SDE, SEF.

Vervolgens tel de oppervlakten van de driehoeken SAB, SBC, SCD, SDE, SEF op. Dit is de oppervlakte van het perk tussen de punten A en F.

Opdracht

Verifieer de tweede wet van Kepler aan door voor één komeet van tien perken die bestreken worden in een zelfde tijdsinterval de oppervlakte te bepalen en aan te tonen dat ze gelijk zijn. Toon in je verslag de methode en de berekeningen.

6 Verifiëren van de derde wet van Kepler

Derde wet van Kepler: de omlooptijd

De derde wet van Kepler legt een relatie tussen de omlooptijd T en de halve lange as b voor een hemellichaam dat rond de zon beweegt.

$$\frac{T^2}{b^3} = \text{constante}$$

Met de constante eenzelfde getal voor elke hemellichaam dat rond de zon beweegt.

Opdracht

Verifieer de derde wet van Kepler aan door voor de drie kometen aan te tonen de bovenstaande vergelijking geldt en dat de constante telkens hetzelfde getal is.

UITBREIDINGVRAGEN:

de antwoorden

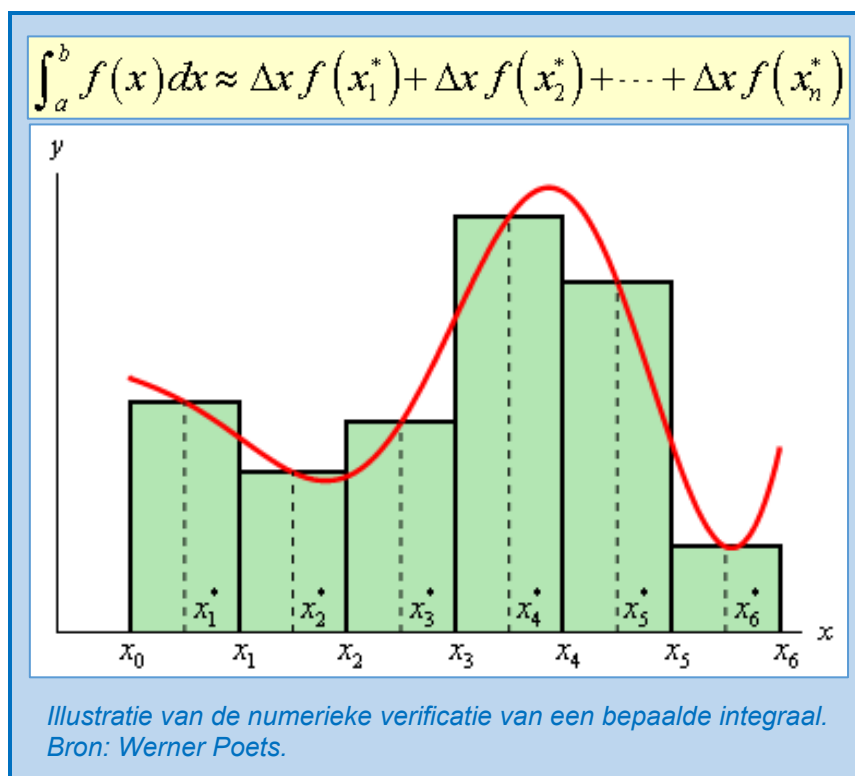
Uitbreiding 1

Hoe kan men een bepaalde integraal numeriek bepalen?

De grafische interpretatie van een bepaalde integraal is de oppervlakte onder de curve.

De grootte van deze oppervlakte kunnen we benaderen door het berekenen van de oppervlakte van rechthoekjes met een basis Δx en als hoogte $f(x)$ met x de coördinaat in het midden van dat interval.

Naarmate Δx kleiner is zal de benadering nauwkeuriger zijn. De consequentie is dan dat het rekenwerk toe neemt.



Uitbreiding 2

Wat is de oriëntatie van de snelheidsvector in het perihelium ten opzichte van de verbindingslijn tussen het perihelium en de Zon?

De snelheidsvector is steeds rakend aan de baan. In het perihelium zal de snelheidsvector loodrecht staan op van de verbindingslijn tussen het perihelium en de Zon.

Uitbreiding 3

Wat is het verband tussen de grootte van de snelheid van de komeet en de grootte van de x-component van de snelheid en de grootte van de y-component van de snelheid?

De snelheidsvector is steeds rakend aan de baan en staat dus in het perihelium loodrecht op van de verbindingslijn tussen het perihelium en de Zon.

De grootte van de x-component van de snelheid is dus 0 m/s,

De grootte van de y-component van de snelheid is gelijk aan de baansnelheid in het perihelium.

Uitbreiding 4

Waarom is het geen goede werkwijze om getallen op te nemen in een formule?

Als een getal is opgenomen in een formule die voorkomt in duizenden cellen en je wenst dit getal aan te passen, bijvoorbeeld je wil het aantal beduidende cijfers van dit getal vergroten, dan dien je deze aanpassing aan te brengen in als deze duizenden cellen.

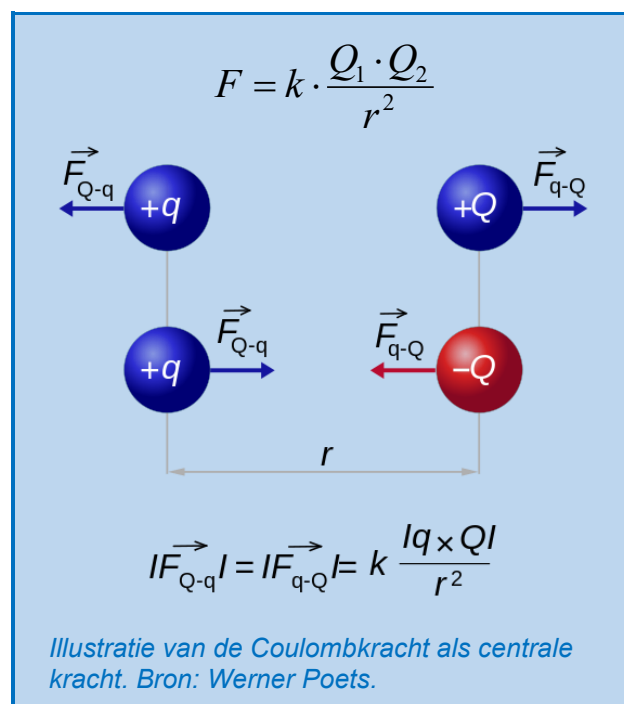
Verwijzen we met een cel-adres in al deze formules naar waar de waarde van dit getal te vinden is, dan hoeven we de aanpassing te doen op slechts in dit ene cel-adres.

Vergeet niet gebruik te maken van een absoluut cel-adres. Dus gebruik \$. Bijvoorbeeld \$A\$3.

Uitbreiding 5

Geef een voorbeeld van een andere centrale kracht die je kent.

De Coulombkracht die uitgeoefend wordt door elektrische ladingen op elkaar.



Uitbreiding 6

Geldt de formule voor a_x ook in het tweede, derde en vierde kwadrant?

Als de komeet zich bevindt in het tweede kwadrant dan moet a_x positief zijn want dan heeft de x-component van versnelling eenzelfde zin als de oriëntatie van de x-as.

$$a_x = -a \cdot \cos(\theta) = -a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Dit is zo met de bovenstaande formule want in het tweede kwadrant is de $\cos(\theta)$ een negatief getal. Dus te samen met het min-teken van de formule geeft dit een positief resultaat voor a_x .

Op analoge wijze kan je dit nagaan voor het derde en vierde kwadrant.

Uitbreiding 7

Door wat wordt de kleinste waarde van Δt bepaald?

Het aantal lijnen in een Excel-werkblad is beperkt (65.536 rijen). Als je Δt te klein neemt dan zal de grafiek van de baan geen gesloten curve meer zijn.

Als $\Delta t < T / 65.536$
dan krijg je geen gesloten curve te zien.

T is de periode van de komeet.